Institut Ucac-Icam

CONCOURS D'ENTREE AU 2^ND^ CYCLE INGENIEUR – MAI 2015

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Nombre de pages : 02
Durée : 3Heures

Calculatrices : Autorisée   Documents : interdits

SUJET A RENDRE A LA FIN DE l'EPREUVE

COMMENCEZ par inscrire vos noms et prénoms, le centre de passage de l'examen et le numéro de votre place sur chaque copie que vous rendrez.

Les surveillants ont pour consigne d'exclure du concours tout candidat qui tente de vouloir copier sur un de ses voisins, d'accéder à des documents quels qu'ils soient, ou d'écrire avant le signal de départ ou après le signal de fin de l'épreuve

Consignes Particulières : une attention particulière doit être portée à la présentation et à l'orthographe

Exercice 1. *(6 points)*
On considère le système différentiel suivant:
$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y \end{cases}$ *où x et y sont deux fonctions de la variable t.*
On pose $X = (x, y)$.

1) Ecrire le système sous forme matricielle. *(2 pts)*

2) Diagonaliser la matrice. *(2 pts)*

3) En déduire les solutions du système. *(2 pts)*

Exercice 2. *(9 points)*
I) 1) Calculer la transformée de Laplace de la fonction f définie par:
$f(t) = t^2 \sin t - te^t \cos 2t$. *(2 pts)*

2) Calculer l'originale de $L(f)(p) = \dfrac{p+1}{p^2+p+2}$. *(2 pts)*

II) 1) Développer en série de Fourier la fonctions f périodique de période 2π définie par:
$\forall x \in [0, \pi], f(x) = x(\pi - x)$. *(2 pts)*

2) En déduire à l'aide de la formule de Parseval les sommes:
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ *et* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$. *(3 pts)*

Problème 1. *(15 points)*
Les parties A et B du problème sont indépendantes.

Partie A: *(6 points)*
Soit $a > 0$ et Γ l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \end{cases}$$

1) Quelle est la nature précise de Γ? *(1 pt)*

2) Soit f l'application de Γ vers $\mathbb{R}$ telle que: $f(x, y, z) = xyz$.
a) Montrer que f atteint ses extrema. *(2 pts)*
b) Déterminer ses extrema ainsi que les points de Γ où ils sont atteints. *(3 pts)*

Partie B: *(9 points)*
Une urne contient n boules ($n > 2$), dont 2 sont blanches. On y effectue des tirages successifs d'une boule sans remise.
Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une première boule blanche et Y celle égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la seconde boule blanche.
1) Déterminer la loi du couple (X, Y). *(1 pt)*
2) Déterminer les lois de X et Y. *(2 pts)*
3) Calculer les moyennes des lois X et Y. *(3 pts)*
4) Calculer les variances des lois X et Y. *(3 pts)*