INSTITUT SUPERIEUR DE TECHNOLOGIE D'AFRIQUE CENTRALE

CONCOURS D'ENTREE 2ND CYCLE – MAI 2013

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Nombre de pages : 2

Durée : 3 Heures

Calculatrice : Autorisée

Documents : Interdits

SUJET A RENDRE A LA FIN DE l'EPREUVE

COMMENCEZ par inscrire vos noms et prénoms, le centre de passage de l'examen et le numéro de votre place sur chaque copie que vous rendrez.

Les surveillants ont pour consigne d'exclure du concours tout candidat qui tente de vouloir copier sur un de ses voisins, d'accéder à des documents quels qu'ils soient, ou d'écrire avant le signal de départ ou après le signal de fin de l'épreuve

Consignes Particulières : une attention particulière doit être portée à la présentation et à l'orthographe

Exercice 1. (6 Points)

1) Soit R la résistance équivalente aux deux résistances R_1 et R_2 montées en parallèle. Ecrire l'expression de la différentielle totale dR. Evaluer un ordre de grandeur de l'accroissement ΔR pour $R_1 = 4$, $R_2 = 7$, $\Delta R_1 = 0.1$, $\Delta R_2 = 0.2$ (*ohms*). (***4 points***)

2) Calculer les dérivées partielles z'_x et z'_y de $z = f(u)$ avec $u = xy + \frac{y}{x}$ (***2 points***)

Exercice 2. (9 Points)

1) Une différence de potentiel constante E est maintenue entre deux extrémités A et B d'un circuit comprenant, en série une capacité C, une résistance pure R et une inductance L. On désigne par Q(t) la charge du condensateur à l'instant t et on suppose $4L > CR^2$

   a) Montrer que Q(t) est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre. (***2 points***)

   b) Résoudre cette équation. (***1 point***)

   c) Déterminer les constantes d'intégration sachant que l'on prend pour instant initial (t = 0), l'instant de la fermeture du circuit, et que, à cet instant, la charge est nulle. (***2 points***)

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 1 telle que :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \tau & si\ t \in [0, \tau[\\ -\tau & si\ t \in \left[\tau, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

Où τ est un nombre réel tel que $0 < \tau < \frac{1}{2}$

Dans la suite, on suppose que $\tau = \frac{1}{6}$

   a) Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-1, 1]$ Dans un repère orthogonal. (***1 point***)

b) On admet que f satisfait les conditions de Dirichlet. Soit S le développement en série de Fourrier associé à la fonction f. Montrer que S(t) = $\sum \frac{1}{n\pi}\sin(2n\pi\tau)\cos(2n\pi t)$. (***3 points***)

Problème. (15 Points)

Dans le cadre d'accords sur la formation professionnelle, une grande entreprise a proposé à son personnel un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel de conception industrielle.
Dans ce problème, on considère les valeurs suivantes : $\pi(0.8) = 0.7881$, $\pi(0.9) = 0.8159$, et $\pi(0.7) = 0.758$, où π est la fonction de répartition de la Loi Normale centrée réduite.

Question 1 :

On note E l'évènement: '' une personne de l'entreprise dont le nom a été tiré au hasard a suivi le stage''. On suppose que P(E) = 0.3. On tire au hasard le nom de n personnes de cette entreprise. On suppose que l'effectif est suffisamment important pour pouvoir assimiler ce prélèvement à un tirage sans remise.

A) On prend n = 15. On considère la variable X qui, à tout prélèvement de 15 noms, associe le nombre de personnes ayant suivi le stage.
   a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
   b) Déterminer la probabilité qu'une personne au plus parmi les 15 dont le nom a été tiré au hasard ait suivi le stage.

B) On prend n = 150. On considère la variable Y qui, à tout prélèvement de 150 noms, associe le nombre de personnes ayant suivi le stage. On admet que Y suit la loi binomiale de paramètres n = 150 et p = 0.3. On décide d'approcher la loi normale de moyenne 45 et d'écart type 5.6. On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 45 et d'écart type 5.6.
   a) Justifier les paramètres de cette loi normale
   b) Calculer la probabilité qu'au plus 40 personnes, parmi les 150 dont le nom a été tiré au hasard, aient suivi le stage.

Question2

Dans cette entreprise, $\frac{45}{100}$ du personnel a un niveau de qualification supérieur ou égal à Bac+2.
L'évènement ''A : une personne de l'entreprise dont le nom a été tiré au hasard a un niveau supérieur ou égal à Bac+2 a donc pour probabilité P(A) = 0.45.'' De plus, $\frac{35}{100}$ de personnes dont le niveau de qualification est supérieur ou égal à Bac+2 ont suivi le stage. Ce qui permet de déduire la probabilité conditionnelle P(E/A) = 0.35.

a) Calculer la probabilité de l'évènement ''une personne de l'entreprise dont le nom a été tiré au hasard a suivi le stage et a un niveau de qualification supérieur à Bac+2''.
b) Calculer la probabilité de l'évènement ''une personne dont le nom a été tiré au hasard parmi les noms des personnes ayant suivi le stage à un niveau supérieur ou égal à Bac+2''.