

INSTITUT SUPERIEUR DE TECHNOLOGIE D'AFRIQUE CENTRALE

CONCOURS D'ENTREE 2ND CYCLE – MAI 2012

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Nombre de pages : 2

Durée : 3 Heures

Calculatrices autorisées - Documents interdits

SUJET A RENDRE A LA FIN DE
L'ÉPREUVE

COMMENCEZ par inscrire vos noms et prénoms, le centre de passage de l'examen et le numéro de votre place sur chaque copie que vous rendrez.

Les surveillants ont pour consigne d'exclure du concours tout candidat qui tente de vouloir copier sur un de ses voisins, d'accéder à des documents quels qu'ils soient, ou d'écrire avant le signal de départ ou après le signal de fin de l'épreuve

Consignes Particulières : une attention particulière doit être portée à la présentation et à l'orthographe

Exercice 1 (6 Points)

Dans \mathbb{R}^2 muni de la base canonique $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$ On considère l'endomorphisme u défini par : $u(e_1) = 4e_1 + e_2$ et $u(e_2) = -2e_1 + e_2$.

On note A la matrice de u dans la base (e_1, e_2) .

- 1) Ecrire la matrice A . (1 point)
- 2) Calculer les valeurs propres de A . (1 point)
- 3) Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A . (2 points)
- 4) En déduire l'existence d'une base de vecteurs propres. (1 point)
- 5) Effectuer la diagonalisation de A . Quelle est la matrice de passage ? (1 point)

Exercice 2 (9 Points)

Soit l'équation différentielle $(E_0) : (x^2 - 1)y' - 2xy = 0$

- 1) Pour quelles valeurs de x peut-on écrire l'équation E_0 de la façon suivante : $y'+g(x)y=0$ où g est une fonction à déterminer. (1,5 points)
- 2)
 - a) Résoudre l'équation (E_0) pour $x > 1$. (1 point)
 - b) Résoudre l'équation (E_0) pour $x \in]-1; 1[$. (1 point)
 - c) Résoudre l'équation (E_0) pour $x < -1$. (1 point)

Soit l'équation différentielle $(E) : (x^2 - 1)y' - 2xy = x^2 + 8x + 1$

- 3) Montrer que (E) possède un polynôme de degré 1 comme solution particulière. (1,5 points)
- 4) En déduire l'ensemble des solutions de (E) . (1,5 points)
- 5) Soit f_1 les fonctions solutions de (E) pour $x > 1$ et f_2 les solutions de (E) pour $x \in]-1; 1[$. Déterminer les limites de f_1 et f_2 en 1. (1,5 points)

PROBLEME (15 Points)

Partie A (5 Points) FONCTION DE TRANSFERT

Soit (E) une équation différentielle de fonction inconnue $y(t)$ et de second membre $x(t)$. On appelle fonction de transfert d'un système physique décrit par (E), la fonction H définie sur une partie de \mathbb{C} par :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

Où $X(p)$ et $Y(p)$ sont des transformées de Laplace respectives de $x(t)$ et $y(t)$. Calculer les fonctions de transfert des fonctions suivantes :

- 1) Circuit RC : $x(t) = y(t) + RCy'(t)$ avec $y(0) = 0$; (1,5 points)
- 2) Circuit CR : $RCx'(t) = y(t) + RCy'(t)$ avec $x(0) = y(0) = 0$; (1,5 points)
- 3) Circuit RLC : $x(t) = y(t) + RCy'(t) + LCy''(t)$ avec $y(0) = y'(0) = 0$; (2 points)

Les parties B et C peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie B (4 Points)

Une entreprise fabrique des jetons destinés à un établissement de jeux. On note D la variable aléatoire prenant pour valeur le diamètre en millimètre des jetons et E la variable aléatoire prenant pour valeur l'épaisseur en millimètre des jetons. On suppose que les variables aléatoires D et E sont indépendantes. Le cahier des charges de cette entreprise indique que le diamètre doit être égal à $29 \pm 0,4$ mm et l'épaisseur doit être égale à $2 \pm 0,1$ mm. On admet que la variable aléatoire D suit la loi normale de moyenne 29 et d'écart type 0,2 et que la variable aléatoire E suit la loi normale de moyenne 2 et d'écart type 0,04.

- 1) Calculer la probabilité qu'un jeton pris au hasard dans la production ait un diamètre conforme au cahier des charges. (1,5 points)
- 2) Calculer la probabilité qu'un jeton pris au hasard dans la production ait une épaisseur conforme au cahier des charges. (1,5 points)
- 3) En déduire la probabilité qu'un jeton pris au hasard dans la production satisfasse les deux conditions du cahier des charges. (1 point)

PARTIE C (6 points)

On suppose que 6% des jetons ne correspondent pas au cahier des charges. On prélève au hasard dans la production 100 jetons. Vu la quantité des jetons produites par l'entreprise, on peut assimiler ce prélèvement à un tirage successif avec remise. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de jetons non-conformes au cahier des charges.

- 1) Déterminer la loi de probabilité de X en justifiant la réponse et en précisant les paramètres de cette loi. (1,5 points)
- 2) Quelle est la probabilité d'avoir un seul jeton non-conforme ? (1,5 points)
- 3) On suppose que l'on peut approcher la loi de X par une loi de Poisson.
 - a) Justifier cette approximation et déterminer le paramètre de cette loi. (1 point)
 - b) Déterminer la probabilité d'avoir exactement 3 jetons ne répondant pas au cahier des charges. (1 point)
 - c) Déterminer la probabilité d'avoir au moins 4 jetons ne répondant pas au cahier des charges. (1 point)