INSTITUT UCAC-ICAM

Concours d'entrée- mai 2015

A remplir par le candidat :	Cadre réservé à l'Institut
Nom : ……………………………..…… Prénom : …………….…………… Centre de passage de l'examen : ………………… N° de place : ……….. ***Epreuve de Mathématiques***	*N° anonyme* : ………..

- -

Cadre réservé à l'Institut		Cadre réservé à l'Institut
Note :	✓ ❒ Concours formation Technicien Supérieur et 1er cycle formation Ingénieur Généraliste **Epreuve de Mathématiques Mai 2015- 3h** ***Recommandations*** **:** Vous devez répondre directement sur ce document	*N° anonyme :* ………..

Commencez par inscrire vos noms et prénoms, le centre de passage de l'examen et le numéro de votre place ci-dessus.

Calculatrices scientifiques non programmables sont autorisées

Documents interdits.

Répondre directement sur ce document à rendre à la fin de l'épreuve.

Les surveillants ont pour consigne d'exclure du concours tout candidat qui tente de vouloir copier sur un de ses voisins, ou d'accéder à des documents quels qu'ils soient, ou d'écrire avant le signal de départ ou après le signal de fin de l'épreuve.

Consignes particulières : Un exercice comporte des affirmations repérées par les lettres a), b), ou des chiffres. Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie **(V)** ou fausse **(F) sans justifier.** Un exercice est considéré comme traité dès qu'une réponse à une des affirmations est donnée (l'abstention et l'annulation ne sont pas considérées comme réponses).

Toute réponse exacte rapporte 1 point.
Toute réponse inexacte entraîne le retrait d'un ½ point.
L'annulation d'une réponse ou l'abstention ne sont pas prises en compte, c-à-d ne rapportent ni ne retirent aucun point.

L'attention des candidats est attirée sur le fait que, dans le type d'exercices proposés, une lecture attentive des énoncés est absolument nécessaire.

I. Ordre dans $\Re$

Exercice 1

Les nombres a et b sont des réels non nuls. Alors :

a) $\forall a \in \left]0, +\infty\right[, \ \sqrt{a} < a < a^2$. ⟶ ☐

b) Si $0 < a < b \leq 1$ alors $\sqrt{b} - \sqrt{a} < b - a$. ⟶ ☐

c) Quel que soit $(a; b)$ tel que $0 < a < b$ on a $\dfrac{1}{2\sqrt{b}} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$. ⟶ ☐

d) $\forall (a; b) \in \Re^2, \ a b \leq \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$. ⟶ ☐

e) $\forall a, b \in \Re_+^*$, $\dfrac{2ab}{a+b} \leq \dfrac{a+b}{2}$. ⟶ ☐

II. Nombres complexes et géométrie

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère ortho normal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \bar{z}^2 - z\,\bar{z}$.

1) L'ensemble des points M tels que M' = M est une parabole et deux droites →

2) L'ensemble des points M tels que M' $\in (O;\vec{u})$ est une parabole. →

3) La détermination des coordonnées de M' en fonction de z et de $\bar{z}$ donne :

$$\begin{cases} x' = 1 - \dfrac{1}{2}(z - \bar{z})^2 \\ y' = \dfrac{1}{2}(z^2 - \bar{z}^2) \end{cases}$$

4) Pour tout nombre complexe z non réel, $z' = 2\,\bar{z}\,\mathrm{Re}(z)$ →

5) Si M $\in (O;\vec{v})$, alors OMM' est un triangle rectangle en O →

6) Si M appartient au cercle trigonométrique,

a) M' appartient au cercle de centre A d'affixe -1 et de rayon 1. →

b) On déduit de la construction de M' qu'il est l'image de M par la translation de vecteur $-\vec{u}$. →

7) Si on pose $z = r\,e^{i\theta}$ pour tout point M du cercle (C) de centre O et de rayon r avec, $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$

a) $z' = 2\,i\,r^2\,e^{i\theta}\sin\theta$ →

b) M' est un point du cercle de centre Ω d'affixe $-r^2$ et de rayon r^2. →

III. Fonctions numérique et exponentielle, logarithme et suites numériques

Exercice 3

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Les fonctions f et g sont définies par : $f(x) = xe^{1-x^2}$ et $g(x) = ax^2 + bx$ et admettent respectivement (*C*) et (Γ) pour courbes représentatives. On recherche tous les couples (a ; b) de réels tels que (*C*) et (Γ) aient la même droite tangente au point d'abscisse 1.

1) Si (a ; b) est une solution alors a + b = 1. ⟶ ☐

2) Si (a ; b) est une solution alors 2a + b = 2. ⟶ ☐

3) Le couple (1 ; 0) est solution. ⟶ ☐

4) Tout couple (a ; b) tel que 2a + b = -1 est solution. ⟶ ☐

5) Le couple (-2 ; 3) est l'unique solution. ⟶ ☐

Partie B

1) La résolution de l'inéquation $e^x - e^{2x} \geq 0$ a pour solution $\Re_-^*$ ⟶ ☐

2) f est une fonction définie sur $]-\infty; 0]$ par $f(x) = \sqrt{e^x - e^{2x}}$ et (*C'*) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 4cm.

a) $f(x) \geq 0$ et f est strictement croissante ⟶ ☐

b) Pour tout $x < 0$, $\dfrac{f(x)}{x} = -\sqrt{\dfrac{e^x}{x}} \times \sqrt{\dfrac{e^x - 1}{-x}}$ ⟶ ☐

<table>
<tr><td>A remplir par le candidat :
Nom : ……………………………..…… Prénom : ……………..……………
Centre de passage de l'examen : ………………… N° de place : ………..
Epreuve de Mathématiques</td><td>Cadre réservé à l'Institut
N° anonyme :
………..</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Cadre réservé à l'Institut
Note :</td><td>✓
❒ Concours formation Technicien Supérieur et 1er cycle formation Ingénieur Généraliste

Epreuve de Mathématiques Mai 2015- 3h

Recommandations : Vous devez répondre directement sur ce document</td><td>Cadre réservé à l'Institut
N° anonyme :
………..</td></tr>
</table>

c) La fonction f est dérivable en 0. ⟶ ☐

d) La tangente en O est parallèle à l'axe des abscisses. ⟶ ☐

3) Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{x - x^2}$.

a) Le domaine de définition de g est $[0,1]$. ⟶ ☐

b) Les fonctions f et g ont un même maximum. ⟶ ☐

c) $\int_0^1 g(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{4}\, dt$ ⟶ ☐

d) L'aire du domaine compris entre la courbe (Cg) l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 1$ dans le même repère que (C ') est 2π . ⟶ ☐

4) Soit (u_n) la suite numérique définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = g(u_n)$.

a) Si $u_0 = \frac{1}{2}$, (u_n) est une suite stationnaire. ⟶ ☐

b) Si $u_0 = \dfrac{1}{4}$ alors $u_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ et $u_2 = \dfrac{\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{4}$ $\longrightarrow$ ☐

c) Si $u_n \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$, la suite (u_n) est croissante. $\longrightarrow$ ☐

d) La suite (u_n) est une suite convergente et sa limite est 0. $\longrightarrow$ ☐

5) Pour tout n, $v_n = \int_n^{n+1} g(x)\, dx$.

a) Géométriquement, v_n est en unité d'aire, l'aire du domaine $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le g(x) \end{cases}$ $\longrightarrow$ ☐

b) On montre que pour tout n, $g(n) \le v_n$ $\longrightarrow$ ☐

Exercice 4

En 2012 dans un pays d'Afrique Centrale a été lancé un vaste programme de reboisement sur 10 ans pour palier ou du moins pour équilibrer les effets du réchauffement climatique. Pour cela 682.500 arbres sont plantés chaque année et 35% de la forêt vieillissante est détruite ou destinée au commerce du bois.

Aucune expertise n'étant faite pour estimer le nombre des pieds d'arbres existant, on suppose que $u_0(x) = x$.

1) Le nombre d'arbres après 3 ans est $(0{,}65)^3 x + 1.414456{,}25$ $\longrightarrow$ ☐

2) Le nombre d'arbres obtenu après n années est une fonction affine décroissante. $\longrightarrow$ ☐

3) $u_{n+1} = f(n,x)$ ⟶ ☐

4) S'il existe une suite (v_n) telle que : $u_n - \alpha = v_n$ alors $\alpha = 1.950.000$ ⟶ ☐

5) Le nombre n d'années en fonction de x au bout desquelles, le nombre d'arbres est supérieur à 2.000.000 est $n \leq \dfrac{\ln\left(\dfrac{50.000}{x - 1.950.000}\right)}{\ln 0{,}65}$ ⟶ ☐

6) (u_n) est une suite croissante ⟶ ☐

7) Pour tout x strictement positif, le nombre d'arbres limite est de 1.950.000 quel que soit le nombre d'années. ⟶ ☐

IV. Equations différentielles

Exercice 5

Une espèce X est parasite d'une espèce Y. Un certain nombre d'observations ont permis d'établir que le nombre moyen x d'individus X et le nombre moyen y d'individus Y sont liés par l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0{,}02\,y = 1{,}0872\,e^{-0{,}02x}.$$

1) La fonction z vérifiant (F) : $z' + 0{,}02\,z = 0$ est la solution de (E) ⟶ ☐

2) On pose $y = z + 1{,}0872\,x\,e^{-0{,}02x}$, z satisfait à la condition (F) ⟶ ☐

3) En admettant que lorsqu'il n'y a plus d'hôte il n'y a plus de parasite,

$y(0) = 0$ ⟶ ☐

4) La fonction f définie pour $x \geq 0$ par $f(x) = 1{,}0872\,x\,e^{-0{,}02x}$ et la droite $y = \frac{2}{5}x$ modélisant le développement des parasites,

a) Cette fonction permet de gérer le nombre d'hôtes $\longrightarrow$ ☐

b) Environ 20 hôtes logent au plus 50 parasites. $\longrightarrow$ ☐

c) $\int_0^{50} (f(x) - y)\,dx$ est la répartition des parasites dans les hôtes $\longrightarrow$ ☐

d) $\int_0^{\alpha} f(x)\,dx = 2500 - 53{,}91(\alpha + 50)e^{-0{,}02x}$ $\longrightarrow$ ☐

Fin de l'épreuve