INSTITUT UCAC-ICAM

Concours d'entrée - mai 2014

A remplir par le candidat : Nom : ……………………………..…… Prénom : ……………..…………… Centre de passage de l'examen : ………………… N° de place : ……….. ***Epreuve de Mathématiques***	Cadre réservé à l'Institut *N° anonyme* : ………..

Cadre réservé à l'Institut Note :	✓ ❒ Concours formation Technicien Supérieur et 1er cycle formation Ingénieur Généraliste **Epreuve de Mathématiques**	Cadre réservé à l'Institut *N° anonyme :* ………..

Commencez par inscrire vos noms et prénoms, le centre de passage de l'examen et le numéro de votre place ci-dessus.

Calculatrices scientifiques non programmables sont autorisées

Documents interdits.

Répondre directement sur ce document à rendre à la fin de l'épreuve.

Les surveillants ont pour consigne d'exclure du concours tout candidat qui tente de vouloir copier sur un de ses voisins, ou d'accéder à des documents quels qu'ils soient, ou d'écrire avant le signal de départ ou après le signal de fin de l'épreuve.

Consignes particulières : Un exercice comporte des affirmations repérées par les lettres a), b), ou des chiffres. Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie **(V)** ou fausse **(F) sans justifier.** Un exercice est considéré comme traité dès qu'une réponse à une des affirmations est donnée (l'abstention et l'annulation ne sont pas considérées comme réponses).

Toute réponse exacte rapporte 1 point.
Toute réponse inexacte entraîne le retrait d'un ½ point.
L'annulation d'une réponse ou l'abstention ne sont pas prises en compte, c-à-d ne rapportent ni ne retirent aucun point.

L'attention des candidats est attirée sur le fait que, dans le type d'exercices proposés, une lecture attentive des énoncés est absolument nécessaire..

INSTITUT UCAC-ICAM

Concours d'entrée - mai 2014

NE RIEN INSCRIRE

Exercice 1

1) On considère la fonction numérique f définie par $f(x)=\dfrac{1}{(6x+7)^3}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

2) L'ensemble de définition E de f est $E=\left]-\infty,-\dfrac{7}{6}\right[\cup\left]-\dfrac{7}{6},+\infty\right[$ → ☐

3) La fonction f n'est ni paire ni impaire. → ☐

4) La fonction f ne possède ni centre, ni axe de symétrie. → ☐

5) La courbe (C) de f admet deux asymptotes. → ☐

6) La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{(6x+7)^2}$ est une primitive de f sur E. → ☐

Exercice2

A. On considère la suite arithmétique (U_n) de premier terme $U_0=2$ et de raison -1.

1) a) Les valeurs de U_1 et U_2 sont respectivement 0 et 1 → ☐
   b) L'expression de U_n en fonction de n est : -n+2 → ☐
   c) Le 16^e terme de cette suite vaut : -14 → ☐

2) On pose $S_n=U_0+U_1+\cdots+U_n$.

On trouve $S_n=\dfrac{(n+1)(n+4)}{2}$ → ☐

B. On considère la suite (V_n) définie par $V_n=e^{U_n}$, avec $n\in N$.

1) a) La suite (V_n) est une suite géométrique de raison e → ☐

b) L'expression de V_n en fonction de n est : e^{2+n} → ☐

c) On pose $\pi_n = V_0 \times V_1 \times \cdots \times V_n$.

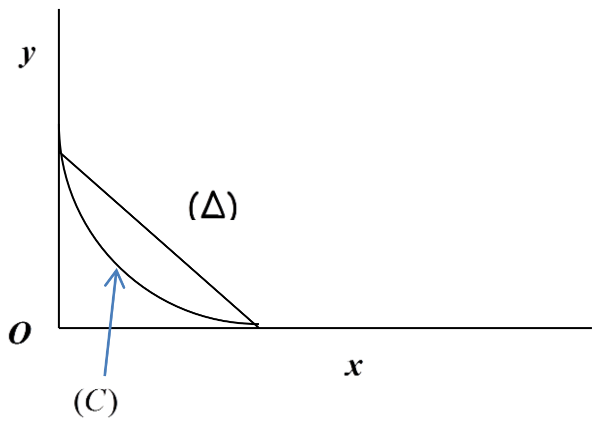
C1) L'expression de π_n en fonction de n est : $e^{\frac{(n+1)(4-n)}{2}}$ $\longrightarrow$ $\boxed{}$

C2) La suite π_n converge vers 0 $\longrightarrow$ $\boxed{}$

Exercice 3

On trouve le dessin ci-dessous exprimant les trajectoires d'un phoque à l'affût d'un poisson.

(C) est la courbe de la fonction $f(x) = (10 - x)^2 e^{-x}$ et (Δ) la droite d'équation : $\boldsymbol{y = ax + b}$, les deux ensembles sont définis sur $[0\,;10]$; x exprime le point de l'axe (Ox) où se trouve le poisson et y le point de l'axe (Oy) où se trouve le phoque.



1. La dérivée seconde de f est telle que $e^x\left(f''(x) - f(x)\right) = 42 - 4x$ $\longrightarrow$ $\boxed{}$

2. $\tan\beta = -10$ est le coefficient directeur de la droite (Δ): $y = -10x + 50$ alors $b = 50$ $\longrightarrow$ $\boxed{}$

3. La droite $y = ax + b$ permet de déterminer facilement la distance séparant le phoque et le poisson et cette distance est de $10\sqrt{101}$ ⟶ ☐

4. Pour tout $0 \le x \le 10$; $g(x) = -10x + 100 - (10 - x)^2 e^{-x}$ est la distance entre deux points de même abscisse sur les deux courbes . ⟶ ☐

5. $-10 \le g(x) \le 100$ *et* $-10 \le g'(x) \le 110$ ⟶ ☐

6. g' est strictement décroissante et $g'(x) = 0$ admet au moins une solution ⟶ ☐

7. $g(0) = g(10)$ alors il existe $\beta > 0$ tel que $g(x) \le \beta$ ⟶ ☐

8. $g'(\beta) = 0 \Leftrightarrow g(\beta) = \dfrac{10(2-\beta)e^{\beta}}{(12-\beta)^2}$ ⟶ ☐

9. $\int_0^{10} g(x)dx$ est l'aire de la partie délimitée par les courbes (C), (Δ) et les droites $x = 0$ et $x = 10$ ⟶ ☐

<u>Exercice 4</u>

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = -x + 1$ et la fonction

$f(x) = \frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

1. $f'(x) + f(x) = ax + b$ alors $a = -1$ et $b = 1$ ⟶ ☐

2. On montre que $g : g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ est une solution de (E) ⟶ ☐

3. $(f - g)$ est une solution de $(E)'$: $y' + 2y = 0$. ⟶ ☐

4. $f_k(x) = ke^{-2x} - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ est la solution de (E) avec $k \in \Re$. ⟶ ☐

5.

6. Parmi les solutions de (E), il existe au plus une solution telle que $f(-1)=e$. ⟶ ☐

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $\Re$ par $f(x)=e^{\sin x}+\sin x$, (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. f est impaire et périodique de période 2π ⟶ ☐
2. f peut être étudiée et représentée sur un intervalle $I=[0;\pi]$ ⟶ ☐
3. $f(0)=f(\pi)$ alors il existe $\alpha_k\in\Re$ tel que $f'(\alpha_k)=0$ et $\alpha_k=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ ⟶ ☐
4. Le sens de variations de f est celui de sin et de expo ⟶ ☐
5. f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $f(x)>0$ pour tout $x\in\Re$ ⟶ ☐
6. $\int_0^{\pi}(f(x)-1)\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(x)-1)dx$ ⟶ ☐
7. On suppose que les fonctions expo et sin admettent les approximations suivantes au voisinage de zéro : $e^x=1+x$ et $\sin x=x$.

   Alors $e^{\sin x}+\sin x=1+2x$ ⟶ ☐
8. La droite (Δ) d'équation $y=2x+1$ est la tangente à (C) au point d'abscisse $x=0$. ⟶ ☐

Exercice 6

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

On note (C) le cercle de centre O et de rayon 2, et A_1 un point fixe de (C) tel que : $z_1 = 2$.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note r la rotation de centre O d'angle $\theta_n = \dfrac{\pi}{n}$

ou $\beta_n = \dfrac{\pi}{2^n}$.

On considère la suite des points (A_k) du cercle (C) définie par la relation de récurrence $A_{k+1} = r(A_k)$. On note z_k l'affixe du point A_k, (θ_n) et (β_n) des suites des angles.

1. $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = \pi\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ et A_∞ est le symétrique de A_1 ⟶ ☐

2. Si $\theta_n = \dfrac{\pi}{n}$ alors $e^{i\frac{\pi}{n}} z_{k+1} = z_k$ et $|z_{k+1} - z_k| = 4\sin\dfrac{\pi}{2n}$ ⟶ ☐

3. Si $\beta_n = \dfrac{\pi}{2^n}$ alors $e^{i\frac{\pi}{2^n}} z_k = z_{k-1}$ et $|z_k - z_{k-1}| = 4\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ ⟶ ☐

4. Pour tout $k \geq 2$, $A_kA_{2k-1} = 4\sin\dfrac{k}{2^{n+1}}\pi$ ou $A_kA_{2k-1} = 4\sin\dfrac{k}{2n}\pi$ ⟶ ☐

Pour tout k tel que $1 \leq k \leq 5$ et β_n, on définit par p_n le périmètre du pentagone obtenu.

5. A_1A_3, A_1A_4, A_2A_4, A_2A_5, A_3A_5 sont les longueurs de ses diagonales et

$A_1A_3 = A_1A_4 = A_2A_4 = A_2A_5 = A_3A_5 = 4\sin\frac{\pi}{2^n}$ pour $\beta_n = \frac{\pi}{2^n}$ ⟶ ☐

6. Il existe $n \geq 1$ tel que le pentagone soit régulier ⟶ ☐

7. (p_n) est une suite convergente ⟶ ☐

Pour tout $1 \leq k \leq 6$ et θ_n, on définit par S_n la surface de l'hexagone obtenu.

8. Il existe $n \geq 2$ tel que l'hexagone soit régulier ⟶ ☐

9. $S_n = 24 \times \frac{\pi}{n}$ ⟶ ☐

10. (S_n) est une suite décroissante et convergente ⟶ ☐

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal d'origine O.

On considère la suite (θ_n) de nombres réels définie par : $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ et pour tout entier naturel n, $\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{5\pi}{6}$. Pour tout entier naturel n, M_n est le point du cercle de centre O et de rayon 1 tel que l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_n})$ ait pour mesure θ_n. On note z_n l'affixe du point M_n.

1. a) M_{n+1} est l'image du point M_n par la translation de vecteur d'affixe $e^{i\frac{5\pi}{6}}$. ⟶ ☐

b) M_{n+p} est l'image du point M_n par la rotation

de centre O et d'angle $\frac{5p\pi}{6}$. ⟶ ☐

2. L'affixe z_n de M_n est $z_n = e^{i\frac{\pi}{2}} + ne^{i\frac{5\pi}{6}}$. ⟶ ☐

3.a) M_n et M_{n+10} sont diamétralement opposés. ⟶ ☐

b) M_n et M_{n+12} sont confondus ⟶ ☐

c) La distance $M_nM_{n+6} = 2$. ⟶ ☐

d) la distance $M_nM_{n+4} = 1$ ⟶ ☐

4. a) Le triangle $M_nM_{n+2}M_{n+6}$ est rectangle. ⟶ ☐

b) Le triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$ est équilatéral. ⟶ ☐

FIN DE L'EPREUVE