INSTITUT SUPERIEUR DE TECHNOLOGIE D'AFRIQUE CENTRALE
Concours d'entrée - mai 2013

A remplir par le candidat :	Cadre réservé à l'IST-AC
Nom : ………………………………..…… Prénom : ……………………………	*N° anonyme* :
Centre de passage de l'examen : ………………… N° de place : ………..	……….
Epreuve de Mathématiques	

Cadre réservé à l'IST-AC	☑ Concours formation Technicien Supérieur et 1er cycle formation Ingénieur Généraliste	Cadre réservé à l'IST-AC
Note :	**Epreuve de Mathématiques : 3h**	*N° anonyme :*
	Nombre d'intercalaire(s) : ……..	……….

Commencez par inscrire vos noms et prénoms, le centre de passage de l'examen et le numéro de votre place ci-dessus.

Calculatrices et Documents interdits.
Répondre directement sur ce document à rendre à la fin de l'épreuve.

Les surveillants ont pour consigne d'exclure du concours tout candidat qui tente de vouloir copier sur un de ses voisins, ou d'accéder à des documents quels qu'ils soient, ou d'écrire avant le signal de départ ou après le signal de fin de l'épreuve.

Consignes particulières : Un exercice comporte des affirmations repérées par les lettres a), b), ou des chiffres. Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie **(V)** ou fausse **(F) sans justifier.** Un exercice est considéré comme traité dès qu'une réponse à une des affirmations est donnée(l'abstention et l'annulation ne sont pas considérées comme réponses).

Toute réponse exacte rapporte 1 point.
Toute réponse inexacte entraîne le retrait d'un point.
L'annulation d'une réponse ou l'abstention ne sont pas prises en compte, c-à-d ne rapportent ni ne retirent aucun point.

L'attention des candidats est attirée sur le fait que, dans le type d'exercices proposés, une lecture attentive des énoncés est absolument nécessaire..

Exercice1

Pour toute fonction f continue sur $[0,1]$, à valeurs dans R, on a : **(V ou F)**

a) Si $f(0)=-1$ et $f(1)=1$, alors il existe un unique $x\in[0,1]$ tel que $f(x)=0$. → ☐

b) Si f est strictement croissante sur $[0,1]$ alors, pour tout $y\in[f(0);\ f(1)]$, il existe un unique $x\in[0,1]$ tel que $y=f(x)$. → ☐

c) Si $f(0)=0$ et $f(1)=1$, alors pour tout $x\in[0,1]$, $f(x)=x$. → ☐

d) Si f est dérivable sur $[0,1]$ et $f(0)=0$ et $f(1)=1$ alors, pour tout $x\in[0,1]$, $f'(x)\geq 0$. → ☐

e) Si $f(0)=-1$ et $f(1)=2$ alors il existe $a\in[0,1]$ tel que $f(a)=a$. → ☐

Exercice 2

Dans R,

a) L'équation $2\ln(x+1)=\ln(x-1)+\ln(x+5)$ n'a pas de solution. $\rightarrow$ ☐

b) Si $\ln(2x-1)-\ln(1+x)\leq \ln 3$ alors $2x-1\leq 3$. $\rightarrow$ ☐

c) Si $x>\frac{1}{2}$ alors $\ln(2x-1)-\ln(1+x)\leq \ln 3$. $\rightarrow$ ☐

d) Si $\ln\left(\sqrt{3x-1}\right)<\ln(x+1)$ alors $x>\frac{1}{3}$. $\rightarrow$ ☐

e) Si $x>2$ alors $\ln\left(\sqrt{3x-1}\right)<\ln(x+1)$. $\rightarrow$ ☐

Exercice 3

Soit $f(x)=5x^4+3x^2+1$ et $g(x)=xe^{x^2}$.

a) $\int_{-18}^{0} f(x)dx=\int_{0}^{18} f(x)dx$. $\rightarrow$ ☐

b) $\int_{-1}^{1} f(x)dx=0$ $\rightarrow$ ☐

c) $\int_{0}^{1} f(x)dx=3$ $\rightarrow$ ☐

d) $\int_{-1}^{1} g(x)dx=0$ $\rightarrow$ ☐

e) $\int_{0}^{1} g(x)dx=\frac{e-1}{2}$. $\rightarrow$ ☐

Exercice 4

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$.

On désigne par D l'ensemble de définition de f.

a) On a $D=\left]0;+\infty\right[$. $\rightarrow$ ☐

b) f est dérivable sur D et, pour tout $x\in D$, $f'(x)=\frac{2e^x}{e^{2x}-1}$ $\rightarrow$ ☐

c) Pour tout $x\in D$, $f(x)<0$. $\rightarrow$ ☐

d) L'équation $f(x)=-1$ possède l'unique solution $x=\ln\left(\dfrac{e+1}{e-1}\right)$.

Exercice 5

On considère pour $x \in R_+$ la fonction f_m définie par

$$\begin{cases} f_m(x) = x - m|x\ln x| & pour \quad x \neq 0 \\ f_m(0) = 0 \end{cases}$$

où m désigne une constante réelle strictement positive.

a) On montre que f_m n'est pas continue pour $x \in R_+$

b) L'expression de la dérivée de f_m pour $x \in R_+^* - \{1\}$ est : $f_m'(x) = 1 - m - m\ln x$.

c) f_m est dérivable pour $x=1$.

Exercice 6

On désigne par m un paramètre réel non nul, et on considère la fonction $f_m : x \mapsto mx + 1 - \dfrac{e^x}{e^x - m}$. On appelle C_m la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) L'ensemble de définition de f_m est : $D(f_m) = R - \{\ln m\}$.

b) La fonction f_m est strictement croissante.

c) Le nombre de solutions de l'équation $f_m(x)=0$ est égale à deux(2).

Exercice 7

Soit la fonction définie, dérivable et strictement décroissante sur $I=[-1;1]$ telle que $f(-1)\times f(1)<0$, alors :

1. $f(-1)<0 \quad et \quad f(1)>0$
2. $f(-1)>0 \quad et \quad f(1)<0$
3. On ne peut pas déterminer le signe de $f(-1)$ ni celui de $f(1)$
4. La fonction g définie sur I par $g(x)=f(e^x)$ est dérivable sur I et pour tout x de I, $g'(x)=f'(e^x)$
5. La fonction g définie sur $]-\infty;0]$ par $g(x)=f(e^x)$ est décroissante sur $]-\infty;0]$
6. La fonction h définie sur I par $g(x)=f(x^2)$ est croissante sur $[-1;0]$
7. f ne s'annule pas sur I.

Exercice 8

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x}{e^x-1}.$$

1. Restitution organisée des connaissances

La fonction exponentielle est l'unique fonction g dérivable sur R vérifiant :

$$\begin{cases} g'(x)=g(x) & \quad pour\ tout\ x\in R \\ g(0)=1 \end{cases}$$

On démontre que $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ $\longrightarrow$ ☐

2. La limite de la fonction f en 0 est : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ $\longrightarrow$ ☐
3. La limite de la fonction f en $+\infty$ est : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $\longrightarrow$ ☐

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour n entier supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n=\frac{1}{n}\left[1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n-1}{n}}\right].$$

1. On démontre que $1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n-1}{n}}=\dfrac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ $\longrightarrow$ ☐
2. On déduit que : $u_n=(e+1)f\left(\frac{1}{n}\right).$ $\longrightarrow$ ☐
3. On peut conclure que la suite (u_n) converge vers $e+1$. $\longrightarrow$ ☐