INSTITUT UCAC-ICAM
Concours d'entrée- Aout 2021

A remplir par le candidat :	Cadre réservé à l'Institut
Nom : ……………………………..…… Prénom : ……………..…………… Centre de passage de l'examen : ………………… N° de place : ……….. Epreuve de : …………………………………………………………………	*N° anonyme* : ………..

Cadre réservé à l'Institut	✓	Cadre réservé à l'Institut
Note :	2ND CYCLE DE LA FORMATION d'INGENIEUR GENERALISTE **Epreuve de MATHEMATIQUE**	*N° anonyme :* ………..

EXERCICE 1 : 6pts

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$dans$\mathbb{R}^3$, dont la représentation matricielle dans la base canonique est donnée par la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1- Calculer le polynôme caractéristique de A. **(1 pt)**

i) $\boldsymbol{P(\lambda) = (2+\lambda)(\lambda-4)^2}$

ii) $\boldsymbol{P(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-4)^2}$

iii) $\boldsymbol{P(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda-4)^2}$

2- Trouver les valeurs propres de A. **(1 pt)**

i) $\boldsymbol{\lambda = 2,\quad \lambda = 4}$

ii) $\boldsymbol{\lambda = -2,\quad \lambda = 4}$

iii) $\boldsymbol{\lambda = 2,\quad \lambda = -4}$

3- Pour chaque valeur propre, déterminer le sous-espace propre correspondant. On donnera une base de chaque sous-espace propre. **(1 pt)**

i) E_2 sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est la droite vectorielle engendrée par $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Une base est donnée par la famille formée par $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. E_4 sous-espace propre associé à la valeur propre 4 est le plan vectoriel engendré par les vecteurs $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Une base est donnée par la famille formée par e_2 et e_3

ii) E_{-2} sous-espace propre associé à la valeur propre -2 est la droite vectorielle engendrée par $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Une base est donnée par la famille formée par $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. E_4 sous-espace propre associé à la valeur propre 4 est le plan vectoriel engendré par les vecteurs $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Une base est donnée par la famille formée par e_2 et e_3.

4- Montrer que la matrice A est diagonalisable. **(1 pt)**

i) Le nombre de vecteurs propres est égal à l'ordre de la matrice donc A est diagonalisable.

ii) Le nombre de vecteurs propres est inférieur à l'ordre de la matrice donc A est diagonalisable.

iii) Le nombre de vecteurs propres est supérieur à l'ordre de la matrice donc A est diagonalisable.

5- Ecrire la matrice Diagonale D qui représente la matrice de f dans la base B. Donner la matrice de passage, notée P, de la base canonique à la base B trouvée à la question précédente, et donner une relation entre A, P et D. **(2 pts)**

i) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A=PDP^{-1}$

ii) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A=PDP^{-1}$

<u>EXERCICE</u> 2 : 5pts

Soit les fonctions définies par :

a) $f(x,y) = 2x^2 + 3y^4$

b) $h(x,y) = ln\sqrt{x^2 + y^2}$

1- Lesquelles des fonctions ci-dessus sont harmoniques ? **(0,5 pt)**

i)) La fonction f ii) La fonction g iii) Les fonctions f et g

2- Soit $\vec{G}(x,y,z) = (x^2 - e^y,\ sinz,\ y^2 + z)$: **(2 x 1 pt)**

a) Calculer $div\vec{G}$ et $\overrightarrow{rot}\vec{G}$.

i) $div\vec{G}$= 2x+1, $\overrightarrow{rot}\vec{G}$= (2y-cosz, 0, e^y).

ii) $div\vec{G}$= 2x+cosz+2y, $\overrightarrow{rot}\vec{G}$= (2y-cosz, 1, e^y).

b) Déterminer la Jacobienne de $\vec{G}$.

i) J_G= -2xycosz

ii) J_G= 2xycosz

iii) J_G= -2xycosy

3- On donne le champ vectoriel $\vec{V}(x,y,z) = (y^2cosx, 2ysinx + e^{2z}, 2ye^{2z})$

a) Montrer que ce champ est un champ de gradient. **(0,5 pt)**

i) Il suffit de montrer que son rotationnel est égale à 0

ii) Il suffit de montrer que sa divergence est nulle

iii) Il suffit de montrer que son rotationnel est égale au vecteur nul

b) Déterminer le potentiel $U(x,y,z)$ dont dérive ce champ sachant qu'il vaut 1 à l'origine. **(1 pt)**

i) $U(x,y,z)$=y^2sinx +ye^{2z}+ 1

ii) $U(x,y,z)$=y^2sinx +ye^{-2z}+ 1

iii) $U(x,y,z)$=y^2sinx + y^2e^{2z}+ 1

c) Quelle est la circulation de ce champ de $A(0,1,0)$ à B($\frac{\pi}{2}$, 3,0) ? **(1 pt)**

i) $C_{AB}(V)$=11

ii) $C_{AB}(V)$=10

iii) $C_{AB}(V)$=12

<u>EXERCICE</u> 3 : 3pts

1- Résoudre dans ℂ l'équation suivante : $(E): Z^2 - (3 + 4i)Z - 1 + 5i = 0$ **(1 pt)**

i) S = {-1+i, -2+3i}

ii) S = {-1+i, 2-3i}
iii) S = {-1+i, 2+3i}.

2- Calculer les intégrales suivantes : **(2 x 1 pt)**

a) $\int_0^1 te^t\,dt,$

i) -1

ii) 0

iii) 1

b) $b)\int_0^{\frac{\pi}{4}} cosx(sinx)^3\,dx$

i) $\frac{1}{16}$

ii) $\frac{1}{8}$

iii) $\frac{1}{4}$

<u>EXERCICE</u> 4 : 6pts

1- (a) Décomposer en éléments simples la fraction : $\frac{2s+1}{(s-2)(s^2+1)}$ **(0,5 pt)**

i) $-\frac{1}{s-2}-\frac{s}{s^2+1}$ ii) $\frac{1}{s-2}+\frac{s}{s^2+1}$ iii) $\frac{1}{s-2}-\frac{s}{s^2+1}$

(b) Résoudre l'équation différentielle : **(1 pt)**

$y''(x) - \frac{5}{2}y'(x) + y(x) = -\frac{5}{2}sinx$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$

i) $y(x)=e^{-2x} - \cos x$ ii) $y(x)=e^{2x} - \sin x$ iii) $y(x)=e^{2x} - \cos x$

2- Décomposer en éléments simples sur R les fractions rationnelles suivantes : **(2 x 1,5 pt)**

a) $F(X) = \frac{X+13}{X^2+2X-8}$

i) $-\frac{15}{6(X-2)}-\frac{3}{2(X+4)}$ ii) $\frac{15}{6(X-2)}-\frac{3}{2(X+4)}$ iii) $\frac{15}{6(X-2)}+\frac{3}{2(X+4)}$

b) $G(X) = \frac{2X-1}{X^2+2X-8}$

i) $\frac{1}{2(X+2)}+\frac{3}{2(X+4)}$ ii) $\frac{1}{2(X-2)}-\frac{3}{2(X-4)}$ iii) $\frac{1}{2(X-2)}+\frac{3}{2(X+4)}$

3- Résoudre le système différentiel (avec conditions initiales) suivant en utilisant la transformée de Laplace. **(1,5 pt)**

$$\begin{cases} x'(t) = x + 5y \\ y'(t) = x - 3y \\ x(0) = 1 \text{ et } y(0) = 2 \end{cases}$$

i) $x(t)=\frac{15}{6}e^{2t}-\frac{3}{2}e^{-4t}$ et $y(t)=\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{3}{2}e^{-4t}$

ii) $x(t)=-\frac{15}{6}e^{2t}-\frac{3}{2}e^{-4t}$ et $y(t)=\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{3}{2}e^{-4t}$

iii) $x(t)=\frac{15}{6}e^{-2t}-\frac{3}{2}e^{-4t}$ et $y(t)=\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{3}{2}e^{-4t}$