

INSTITUT UCAC-ICAM
Concours d'entrée- Aout 2021

A remplir par le candidat :

Nom : Prénom :
 Centre de passage de l'examen : N° de place :
 Epreuve de :

Cadre réservé à l'Institut
N° anonyme :

<p style="text-align: center;"><u>Cadre réservé à l'Institut</u></p> <p>Note :</p>	<p>✓</p> <p>2ND CYCLE DE LA FORMATION d'INGENIEUR GENERALISTE ET INGENIEUR INFORMATIQUE</p> <p><u>Epreuve de MATHEMATIQUE</u></p>	<p style="text-align: center;"><u>Cadre réservé à l'Institut</u></p> <p><i>N° anonyme :</i> </p>
--	--	--

EXERCICE 1 : 6pts

Soit f une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 , dont la représentation matricielle dans la base canonique est donnée par la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1- Calculer le polynôme caractéristique de A . **(1 pt)**

- i) $P(\lambda) = (2 + \lambda)(\lambda - 4)^2$
- ii) $P(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 4)^2$
- iii) $P(\lambda) = (2 - \lambda)(\lambda - 4)^2$

2- Trouver les valeurs propres de A . **(1 pt)**

- i) $\lambda = 2, \quad \lambda = 4$
- ii) $\lambda = -2, \quad \lambda = 4$
- iii) $\lambda = 2, \quad \lambda = -4$

3- Pour chaque valeur propre, déterminer le sous-espace propre correspondant. On donnera une base de chaque sous-espace propre. **(1 pt)**

- i) E_2 sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est la droite vectorielle engendrée par $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Une base est donnée par la famille formée par $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. E_4 sous-espace propre associé à la valeur propre 4 est le plan

vectorel engendré par les vecteurs $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Une base est

donnée par la famille formée par e_2 et e_3

ii) E_{-2} sous-espace propre associé à la valeur propre -2 est la droite vectorielle

engendrée par $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Une base est donnée par la famille formée par

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. E_4 sous-espace propre associé à la valeur propre 4 est le plan

vectorel engendré par les vecteurs $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Une base est

donnée par la famille formée par e_2 et e_3 .

4- Montrer que la matrice A est diagonalisable. (1 pt)

i) Le nombre de vecteurs propres est égal à l'ordre de la matrice donc A est diagonalisable.

ii) Le nombre de vecteurs propres est inférieur à l'ordre de la matrice donc A est diagonalisable.

iii) Le nombre de vecteurs propres est supérieur à l'ordre de la matrice donc A est diagonalisable.

5- Ecrire la matrice Diagonale D qui représente la matrice de f dans la base B . Donner la matrice de passage, notée P , de la base canonique à la base B trouvée à la question précédente, et donner une relation entre A, P et D . (2 pts)

i)
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1}$$

ii)
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1}$$

EXERCICE 2 : 5pts

Soit les fonctions définies par :

a) $f(x, y) = 2x^2 + 3y^4$

b) $h(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

1- Lesquelles des fonctions ci-dessus sont harmoniques ? **(0,5 pt)**

i)) La fonction f

ii) La fonction g

iii) Les fonctions f et g

2- Soit $\vec{G}(x, y, z) = (x^2 - e^y, \sin z, y^2 + z)$: **(2 x 1 pt)**

a) Calculer $\text{div}\vec{G}$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{G}$.

i) $\text{div}\vec{G} = 2x+1, \overrightarrow{\text{rot}}\vec{G} = (2y-\cos z, 0, e^y)$.

ii) $\text{div}\vec{G} = 2x+\cos z+2y, \overrightarrow{\text{rot}}\vec{G} = (2y-\cos z, 1, e^y)$.

b) Déterminer la Jacobienne de \vec{G} .

i) $J_G = -2xy\cos z$

ii) $J_G = 2xy\cos z$

iii) $J_G = -2xy\cos y$

3- On donne le champ vectoriel $\vec{V}(x, y, z) = (y^2 \cos x, 2y \sin x + e^{2z}, 2ye^{2z})$

a) Montrer que ce champ est un champ de gradient. **(0,5 pt)**

i) Il suffit de montrer que son rotationnel est égale à 0

ii) Il suffit de montrer que sa divergence est nulle

iii) Il suffit de montrer que son rotationnel est égale au vecteur nul

b) Déterminer le potentiel $U(x, y, z)$ dont dérive ce champ sachant qu'il vaut 1 à l'origine.

(1 pt)

i) $U(x, y, z) = y^2 \sin x + ye^{2z} + 1$

ii) $U(x, y, z) = y^2 \sin x + ye^{-2z} + 1$

iii) $U(x, y, z) = y^2 \sin x + y^2 e^{2z} + 1$

c) Quelle est la circulation de ce champ de $A(0,1,0)$ à $B(\frac{\pi}{2}, 3,0)$? **(1 pt)**

i) $C_{AB}(V) = 11$

ii) $C_{AB}(V) = 10$

iii) $C_{AB}(V) = 12$

EXERCICE 3 : 3pts

1- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante : $(E): Z^2 - (3 + 4i)Z - 1 + 5i = 0$ **(1 pt)**

i) $S = \{-1+i, -2+3i\}$

- ii) $S = \{-1+i, 2-3i\}$
 iii) $S = \{-1+i, 2+3i\}$.

2- Calculer les intégrales suivantes : **(2 x 1 pt)**

a) $\int_0^1 te^t dt,$

- i) -1
 ii) 0
 iii) 1

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x (\sin x)^3 dx$

- i) $\frac{1}{16}$
 ii) $\frac{1}{8}$
 iii) $\frac{1}{4}$

EXERCICE 4 : 6pts

1- (a) Décomposer en éléments simples la fraction : $\frac{2s+1}{(s-2)(s^2+1)}$ **(0,5 pt)**

i) $-\frac{1}{s-2} - \frac{s}{s^2+1}$ ii) $\frac{1}{s-2} + \frac{s}{s^2+1}$ iii) $\frac{1}{s-2} - \frac{s}{s^2+1}$

(b) Résoudre l'équation différentielle : **(1 pt)**

$y''(x) - \frac{5}{2}y'(x) + y(x) = -\frac{5}{2}\sin x$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$

i) $y(x)=e^{-2x} - \cos x$ ii) $y(x)=e^{2x} - \sin x$ iii) $y(x)=e^{2x} - \cos x$

2- Décomposer en éléments simples sur R les fractions rationnelles suivantes : **(2 x 1,5 pt)**

a) $F(X) = \frac{X+13}{X^2+2X-8}$

i) $-\frac{15}{6(X-2)} - \frac{3}{2(X+4)}$ ii) $\frac{15}{6(X-2)} - \frac{3}{2(X+4)}$ iii) $\frac{15}{6(X-2)} + \frac{3}{2(X+4)}$

b) $G(X) = \frac{2X-1}{X^2+2X-8}$

i) $\frac{1}{2(X+2)} + \frac{3}{2(X+4)}$ ii) $\frac{1}{2(X-2)} - \frac{3}{2(X-4)}$ iii) $\frac{1}{2(X-2)} + \frac{3}{2(X+4)}$

3- Résoudre le système différentiel (avec conditions initiales) suivant en utilisant la transformée de Laplace. **(1,5 pt)**

$$\begin{cases} x'(t) = x + 5y \\ y'(t) = x - 3y \\ x(0) = 1 \text{ et } y(0) = 2 \end{cases}$$

i) $x(t) = \frac{15}{6} e^{2t} - \frac{3}{2} e^{-4t}$ et $y(t) = \frac{1}{2} e^{2t} + \frac{3}{2} e^{-4t}$

ii) $x(t) = -\frac{15}{6} e^{2t} - \frac{3}{2} e^{-4t}$ et $y(t) = \frac{1}{2} e^{2t} - \frac{3}{2} e^{-4t}$

iii) $x(t) = \frac{15}{6} e^{-2t} - \frac{3}{2} e^{-4t}$ et $y(t) = \frac{1}{2} e^{2t} + \frac{3}{2} e^{-4t}$