INSTITUT UCAC-ICAM 2ème Concours d'entrée- 12 Août 2020	
A remplir par le candidat : Nom : ……………………………..…… Prénom : …………….……………. Ville de passage de l'examen : ………………… N° de place : ……….. Epreuve de **: Mathématiques**	Cadre réservé à l'Institut *N° anonyme* : ………..

Cadre réservé à l'Institut	✔	Cadre réservé à l'Institut
Note :	**2ème Concours 1er cycle** **Epreuve de Mathématiques** Session d'Août 2020 Durée : 1h30 Calculatrice non programmable autorisée **Répondre Uniquement sur le Document Réponses**	*N° anonyme :* ………..

Pour tous les exercices, veuillez entourer la (ou les) bonne(s) réponse(s) (Attention ! il faut répondre directement sur le Document Réponses)

Exercice 1

A) Un volume constant de $2\,200\,m^3$ d'eau est réparti entre deux bassins A et B. Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes. On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient $800\,m^3$ d'eau et le bassin B contient $1400\,m^3$ d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

- $\boldsymbol{u_n}$ le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du nième jour de fonctionnement ; donc $\boldsymbol{u_0 = 800}$
- $\boldsymbol{v_n}$ le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du nième jour de fonctionnement ; donc $\boldsymbol{v_0 = 1400}$

1) Alors $\boldsymbol{u_{n+1}}$ et $\boldsymbol{v_{n+1}}$ s'expriment respectivement en fonction de $\boldsymbol{u_n}$ et $\boldsymbol{v_n}$ comme **:**

a) $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 330$ et $v_{n+1} = 0{,}75v_n - 220$
b) $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 330$ et $v_{n+1} = 0{,}75v_n + 220$
c) $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 220$ et $v_{n+1} = 0{,}85v_n + 330$
d) $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 330$ et $v_{n+1} = 0{,}85v_n + 220$

2) $t_n = u_n - 1320$ est :
   a) Une suite géométrique de premier terme $\boldsymbol{t_0} = -\mathbf{520}$ et de raison $\boldsymbol{q} = \mathbf{0,9}$
   b) Une suite géométrique de premier terme $\boldsymbol{t_0} = -\mathbf{520}$ et de raison $\boldsymbol{q} = \mathbf{0,85}$
   c) Une suite géométrique de premier terme $\boldsymbol{t_0} = -\mathbf{520}$ et de raison $\boldsymbol{q} = \mathbf{0,25}$
   d) Une suite géométrique de premier terme $\boldsymbol{t_0} = -\mathbf{520}$ et de raison $\boldsymbol{q} = \mathbf{0,75}$

3) L'expression de t_n en fonction de **n** est :
   a) $\boldsymbol{t_n} = -\mathbf{520}(\mathbf{0,75})^{\boldsymbol{n}}$
   b) $\boldsymbol{t_n} = -\mathbf{520}(\mathbf{0,9})^{\boldsymbol{n}}$
   c) $\boldsymbol{t_n} = -\mathbf{520}(\mathbf{0,85})^{\boldsymbol{n}}$
   d) $\boldsymbol{t_n} = -\mathbf{520}(\mathbf{0,25})^{\boldsymbol{n}}$

4) Les expressions respectives de $\boldsymbol{u_n}$ et $\boldsymbol{v_n}$ en fonction de n sont :
   a) $u_n = 1320 - 520(0{,}75)^n$ et $v_n = 880 + 520(0{,}75)^n$
   b) $u_n = 1320 - 520(0{,}9)^n$ et $v_n = 880 + 520(0{,}85)^n$
   c) $u_n = 1320 + 520(0{,}75)^n$ et $v_n = 880 - 520(0{,}25)^n$
   d) $u_n = 1320 + 520(0{,}75)^n$ et $v_n = 880 + 520(0{,}75)^n$

5) Au bout de combien de jour le volume d'eau présent dans le bassin B sera-t-il approximativement égal au volume d'eau présent dans le bassin A ?
   a) 8 jours
   b) 3 jours
   c) 5 jours
   d) 6 jours

6) Quels volumes maximums respectifs les bassins B et A peuvent-ils atteindre ?
   a) $1400\, m^3$ et $1320\, m^3$
   b) $800\, m^3$ et $1320\, m^3$
   c) $1320\, m^3$ et $800\, m^3$
   d) $1400\, m^3$ et $800\, m^3$

Exercice 2

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère le polynôme complexe $P(z) = Z^3 - 8$ d'unité graphique $1cm$.

1) Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$ sont:
   a) $s = \{-2, -1 + i\sqrt{3}\ et - 1 - i\sqrt{3})$
   b) $s = \{2,\ 2e^{\frac{2i\pi}{3}}\ et\ 2e^{-\frac{2i\pi}{3}})$
   c) $s = \{2, -1 + i\sqrt{3}\ et\ 1 - i\sqrt{3})$
   d) $s = \{2, -1 - i\sqrt{3}\ et\ 1 + i\sqrt{3})$

2) On pose Z_A (la solution réelle pure), $Z_B\ et\ Z_C$ (les deux autres solutions), les affixes respectifs des points A, B et C dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$. Le triangle ABC est :
a) Un triangle isocèle
b) Un triangle isocèle rectangle
c) Un triangle équilatéral
d) Un triangle rectangle

On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' telle que $Z' = e^{2i\frac{\pi}{3}}Z$
3) L'application f est :
a) Une rotation de centre A d'angle $\frac{2\pi}{3}$
b) Une similitude directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2
c) Une rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{3}$
d) Une similitude directe de centre 0, d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et de rapport 2

4) Les images respectifs des points B et C par l'application f sont :
   a) $-1 - i\sqrt{3}$ et 2
   b) $-2e^{-2i\frac{\pi}{3}}$ et 2
   c) $-1 + i\sqrt{3}$ et 2
   d) $4e^{2i\frac{\pi}{3}}$ et 4

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A, B, C, D et E les points d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = i$, $z_C = -1$, $z_D = -i$ et $z_E = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1 - i)$.

1) L'angle $\widehat{DAE}$ est égal à : •
   a) $\pi/6$
   b) $\pi/4$
   c) $\pi/3$
   d) $\pi/2$

2) L'ensemble des points d'affixe z telle que $|\boldsymbol{z + i}| = |\boldsymbol{z - 1}|$ est :
   a) La médiatrice du segment $[AB]$
   b) le milieu du segment $[BC]$
   c) le cercle de centre O et de rayon 1
   d) la médiatrice du segment $[AD]$.

3) L'ensemble des points d'affixe z telle que $\boldsymbol{\frac{z + i}{z + 1}}$ soit un réel est :
   a) la droite (CD) privée du point C,
   b) le cercle de diamètre $[CD]$ privé du point C,
   c) le cercle de diamètre $[BD]$ privé du point C,
   d) la médiatrice du segment $[AB]$.

4) L'ensemble des points d'affixe z telle que $\boldsymbol{arg(z - i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ où $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$ est :
   a) le demi-cercle de diamètre $[BD]$ passant par A,
   b) la droite (BD),
   c) la demi-droite $]BD)$ d'origine B passant par D privée de B,
   d) le cercle de diamètre $[BD]$ privé de B et D.

Exercice 4

Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{1}{4}x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

1) Son domaine de définition est :
   a) $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$
   b) $]1; +\infty[$
   c) $]-\infty; -1[$
   d) $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$
2) f est une fonction :
   a. Impaire
   b. Paire
   c. Aucune réponse n'est juste

3) Les limites de f aux 1 et en $+\infty$ sont respectivement :
   a) $+\infty$ et $+\infty$
   b) 0 et $+\infty$
   c) 0 et $-\infty$
   d) $+\infty$ et $ln1$

4) La dérivée de f est :
   a) $f'(x) = \frac{x^2-2x-7}{4(x-1)^2}$
   b) $f'(x) = \frac{x^2-9}{4(x-1)^2}$
   c) $f'(x) = \frac{x^2-2x-7}{4(x^2-1)}$
   d) $f'(x) = \frac{x^2-9}{4(x^2-1)}$
5) Positions relatives de la courbe de f (C_f) par rapport à la droite d'équation $(\Delta): y = \frac{1}{4}x$
   a) Dans l'intervalle $]-\infty; -1[$ (C_f) est en dessous de (Δ) et dans l'intervalle $]1; +\infty[$ (C_f) est au dessus de (Δ)
   b) Dans l'intervalle $]1; +\infty[$ (C_f) est en dessous de (Δ)
   c) Dans l'intervalle $]-\infty; -1[$ (C_f) est au dessus de (Δ)
   d) Dans l'intervalle $]-\infty; 1[$ (C_f) est en dessous de (Δ) et dans l'intervalle $]1; +\infty[$ (C_f) est au dessus de (Δ)

Exercice 5

Soit l'équation différentielle suivante : (E): $y' + 3y = 3x + 1$

1) La solution générale de son équation homogène associée est :
   a) ke^{3x} $avec\ k\epsilon\mathbb{R}$
   b) ke^{-3x} $avec\ k\epsilon\mathbb{R}$
   c) $-3x + k$ $avec\ k\epsilon\mathbb{R}$
   d) $3x + k$ $avec\ k\epsilon\mathbb{R}$

2) La solution particulière de son équation avec second membre est :
   a) $(3x + 1)e^{3x}$
   b) $\frac{3x+1}{3}$
   c) x
   d) $3x + 1$

3) La solution complète de cette équation est
   a) $y(x) = ke^{3x} + 3x + 1\ avec\ k\epsilon\mathbb{R}$
   b) $y(x) = ke^{-3x} + x\ \ avec\ k\epsilon\mathbb{R}$
   c) $y(x) = -3x + k + (3x + 1)e^{3x}\ avec\ k\epsilon\mathbb{R}$
   e) $y(x) = 3x + k + \frac{3x+1}{3}\ \ avec\ k\epsilon\mathbb{R}$

4) L'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = 5$ est :

   a) $y(x) = 4e^{3x} + 3x + 1$
   b) $y(x) = -3x + 4 + (3x + 1)e^{3x}$
   c) $y(x) = 3x + \frac{14}{3} + \frac{3x+1}{3}$
   d) $y(x) = 5e^{-3x} + x$

INSTITUT UCAC-ICAM

Concours d'entrée-Aout 2020

NE RIEN ECRIRE ICI

Exercice 6

1) Le calcul de $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx$ donne le résultat suivant :
   a) -1
   b) 1
   c) -3
   d) 3

2) Le calcul de $\int_1^{e} \ln^2 x\, dx$ donne le résultat suivant :
   a) $\mathrm{e}-2$
   b) $\mathrm{e}^2-\mathrm{e}$
   c) $-4\mathrm{e}+2$
   d) $e+2$

3) Le calcul de $\int_0^{1} \frac{2x^2-x+2}{2x+1}\, dx$ donne le résultat suivant :
   a) $\frac{-1}{2}+3\ln 3$
   b) $\frac{1+\ 3\ln 3}{2}$
   c) $\frac{-1+3\ln 3}{2}$
   d) $\frac{-1}{2}+3\ln 3$

Exercice 7

1) La solution du système d'équation suivant (E): $\begin{cases} 3e^{2x}-4e^{2y}=-6 \\ -2e^{2x}+3e^{2y}=5 \end{cases}$ est :

   a) $S=\{(2,3)\}$
   b) $S=\left\{\left(\frac{\ln 2}{2},\frac{\ln 3}{2}\right)\right\}$
   c) $S=\{(2\ln 2\,,3\ln 2)\}$
   d) $S=\left\{\left(\frac{\ln 2}{2},\frac{\ln 3}{3}\right)\right\}$

2) La solution de l'inéquation $ln^2 x \ - 3\ lnx \ - 4 \leq 0$ est :

a) $\left[\frac{1}{e}\ ;\ e^4\right]$
b) $]-\infty ;\ e^{-1}] \cup [e^4\ ;\ +\infty[$
c) $]\ e^{-1}\ ;\ e^4[$
d) $]-\infty ;\ -1] \cup [4\ ;\ +\infty[$
e) $[1\ ;\ 4]$