A remplir par le candidat :	Cadre réservé à l'Institut
Nom : ……………………………..…… Prénom : ………………..…………	N° anonyme :
Ville de passage de l'examen : ………………… N° de place : ………..	………..
Epreuve de : Mathématiques	

Cadre réservé à l'Institut	☑ 1er cycle formation Ingénieur Généraliste Parcours International et Interculturel	Cadre réservé à l'Institut
Note :	**Epreuve de Mathématiques – Durée 1 h 30**	N° anonyme :
	Calculatrices non programmables autorisées	………..
	Documents Interdits	

L'épreuve comporte un exercice et un problème.
Les parties A et B du problème sont dépendantes.

Exercice: (5 points)

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe distinct de -1.

Soit $Z = \dfrac{2iz - i}{z+1}$ avec x et y des nombres réels.

1) Calculer $\overline{Z}$, $Re(Z)$, $Im(Z)$, $|Z|$ en fonction de x et y. 2 pts

2) Déterminer l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tels que Z soit un réel. 1 pt

3) Déterminer l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur. 1 pt

4) Déterminer les affixes des points d'intersection de E_1 et E_2. 1 pt

Problème: (15 points)

Partie A: (10 points)

On note f_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f_n(x) = \dfrac{e^x}{(x+1)^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

(C_n) désigne la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité grahique: 2cm.

1) Etudier les limites de f_n aux bornes de son domaine de définition. 1 pt

2) a) Déterminer la fonction dérivée f'_n de f_n et étudier, suivant la parité de n, le signe de $f'_n(x)$. 2 pts

b) En déduire les variations de f_n. 1 pt

3) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un même point. 1 pt

4) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_n(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement ce résultat. 1 pt

5) a) Donner l'expression de f'_n en fonction de f_n et f_{n+1}. 1 pt

b) En déduire les positions relatives de (C_1) et (C_2). 1 pt

c) Représenter graphiquement (C_1) et (C_2). 2 pts

Partie B: (5 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite (U_n) par $U_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1) a) Démontrer que la suite (U_n) est décroissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \geq 0$. 1.5 pts

b) Que peut-on en déduire? 0.5 pt

2) a) Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a:

$$\frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \leq U_n \leq \frac{e}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$ 1.5 pts

b) En déduire la limite de la suite (U_n). 0.5 pt

3) Etablir une relation entre U_n et U_{n+1}. 1 pt